Posloupnosti funkcí

Poznámky a příklady. *1. (Moore-Osgoodova věta) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na (a,b) a $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f_n \rightrightarrows f$. Pokud $\lim\limits_{x\to b+} f_n(x)$ existuje vlastní pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom existuje $\lim_{x\to b+} f(x)$ a platí*

$$\lim_{x\to b+} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to b+} f_n(x)\right),$$

(speciálně, limita napravo existuje).

2. *Analogicky k posloupnostem definujeme i bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí. Označíme-li $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, pak říkáme, že řada $\sum_{k=1}^\infty$ konverguje bodově. resp. stejnomětně k funkci (součtu) $s : A \to \mathbb{R}$, pokud $s_n \to s$, resp. $s_n \rightrightarrows s$.*

3. *(nutná podmínka stejnoměrné konvergence řad) Pokud řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně, potom $f_n \rightrightarrows 0$.*

4. *(Weierstrassův M-test) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí dfinovaných na $A \subseteq \mathbb{R}^d$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Předpokládejme navíc, že*

   - $|f_n(x)| \le a_n,\ x \in A,\ n \in \mathbb{N}$,
   - $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$.

   Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvrguje stejnoměrně (na A).

Definice 1 (stejná omezenost posloupnosti funkcí)**.** *Nechť $\{f_k\}$ je posloupnost (reálných, či komplexních) funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_k\}$ je* ***stejně omezená****, pokud existje $K \in \mathbb{R}$, že*

$$|f_n(x)| \le K, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in A.$$

Věta 2 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$, (tj. platí $a_n \le a_{n+1}$ na A, $n \in \mathbb{N}$, nebo $a_n \ge a_{n+1}$ na A, $n \in \mathbb{N}$)*

Nechť navíc $\{b_n\}$ je posloupnost (reálných, či komplexních) funkcí definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$.

Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Dirichlet) $a_n \rightrightarrows 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$ je stejně omezená (obojí na A),*

- *(Abel) $\{a_n\}$ je stejně omezená a $\sum b_n$ konverguje stejnoměrně (obojí na A),* *potom řada $\sum a_n b_n$ konverguje stejnoměrně (na A).*

Poznámky a příklady. *1. speciální volbou $b_n = (-1)^n$ dostaneme Leibnizovo kritérium (pro stejnoměrnou konvergenci)*

2. Abelovo kritérium dává snadný důkaz Abelovy věty z minulého semestru.